

Optimización de Portafolios Inmobiliarios: Una Aplicación al Mercado Colombiano

Autores:

Andrés Felipe Ramírez Arango

Pamela Andrea Gómez Granados

Asesor:

David Alejandro Yepes Raigosa

Resumen:

Desde su aparición y regulación en Colombia, los fondos de inversión colectiva inmobiliarios se han convertido en una llamativa alternativa de inversión por las posibilidades de diversificación y ventajas que ofrecen. En este trabajo, se realiza una especificación de la mecánica de los fondos inmobiliarios, desde el ámbito operativo y normativo, adicionalmente, una revisión de los componentes del modelo de Markowitz y su aplicación en activos financieros inmobiliarios del mercado local, con el propósito de conformar una cartera óptima con mejor desempeño en términos de rendimiento-riesgo comparado con el mercado accionario y de deuda colombiano aproximado por los índices COLCAP y COLTES, respectivamente. Los resultados obtenidos permiten establecer que la gestión y optimización de los fondos de inversión inmobiliaria son una buena alternativa de inversión frente a las opciones clásicas de renta fija y renta variable.

Palabras clave:

Selección de portafolio, Modelo de Media-Varianza, Fondos de inversión inmobiliaria, Sector inmobiliario, optimización de portafolio.

Clasificación JEL:

G11, G15, G28, C02, D81

Introducción

En Colombia se presenta un creciente déficit de vivienda; sumado a la necesidad de herramientas que faciliten la conexión entre el mercado inmobiliario y el inversionista. A raíz de esto, aparecen los fondos de inversión colectiva, con los objetivos de generar valor para el inversionista, operar instrumentos financieros y contribuir con el desarrollo del país.

Se entiende por Fondo de Inversión Colectiva (FIC) todo mecanismo de captación o administración de sumas de dinero u otros activos, conformado por un grupo de personas, denominadas inversionistas y cuyos recursos serán gestionados de forma colectiva para obtener beneficios económicos, también colectivos (Decreto 1242, 2013).

Los FIC ofrecen seis tipos de instrumentos financieros de acuerdo con Asobolsa y Asofiduciarias, quienes los denominan fondos: accionarios, balanceados, de renta fija, bursátiles, inmobiliarios, entre otros. Y pueden ser abiertos (capital se retira y adiciona sin restricción de fecha), escalonados (capital se retira o adiciona con restricción de fechas) o cerrados (capital no debe ser retirado o adicionado). Los FIC permiten el acceso de inversiones de gran magnitud con aportes mínimos de acuerdo con la normatividad ya establecida. Para este tipo de activos priman los principios de diversificación, menor riesgo y potencial de revalorización.

Enfocándose en los inmobiliarios, el Gobierno a través del Decreto 2555 de 2010, modificado por el Decreto 2090 de 2017 estimula la inversión sobre inmuebles como edificios, viviendas, bodegas, infraestructuras de mayor magnitud y ganancia a través de una renta con activos que incorporen una segregación patrimonial.

Por otra parte, se encuentra que los FIC se han constituido como significativos medios de inversión y financiación de la actividad inmobiliaria. Presentan un nuevo régimen jurídico para las sociedades inmobiliarias existentes en otros países y, desde una perspectiva estratégica y

competitiva, se obtiene una mayor facilidad de acceso a la financiación a través de los mercados de capital (Fernández Gimeno, Llovera Sáez, y Roig, 2012). Adicional a lo anterior, es necesario mencionar que la cartera colectiva inmobiliaria en Colombia puede obtener créditos para la adquisición de bienes inmuebles hasta por un monto equivalente a dos veces el valor de su patrimonio, según la normatividad vigente.

En relación con la teoría de la selección u optimización de portafolios y luego de la publicación del artículo *Portfolio selection*, del economista estadounidense Harry Markowitz, ha venido a desarrollarse el denominado modelo de selección de portafolio de media-varianza, en el cual el autor plantea como objetivo central calcular conjuntos eficientes para grandes cantidades de títulos valores. Así mismo, propone cómo incorporar el análisis de media-varianza en una teoría del comportamiento racional bajo incertidumbre (Markowitz, 1952).

Además, Mendizabal, Miera, y Zubia (2002) encuentran en el modelo la capacidad de proporcionar composiciones de carteras de mejor evolución, en comparación con índices de referencia del mercado. Dicho modelo ha sido considerado un referente teórico, y en los últimos años, en la literatura financiera, como un mecanismo práctico para administradores de portafolios. En consecuencia, este trabajo realizó la siguiente pregunta de investigación: ¿Existe una cartera óptima compuesta por los FIC inmobiliarios del mercado financiero colombiano, con mejor desempeño rendimiento-riesgo en relación a índices bursátiles de referencia?

Con base en lo anterior, se presentaron los objetivos específicos de analizar el funcionamiento de los fondos inmobiliarios, desde la perspectiva normativa-reglamentaria y su desempeño; Realizar, una caracterización del mercado inmobiliario en Colombia. Adicionalmente, emprender una revisión de los componentes del modelo de Markowitz. Dichos propósitos subordinados a un objetivo general de efectuar una aplicación del modelo para el caso

de los fondos de inversión colectiva inmobiliarios en Colombia para conformar una cartera óptima que ofrezca mayor rentabilidad dado un menor o igual riesgo en comparación con índices representativos de renta fija y renta variable del mercado colombiano.

Estado del arte

El sector inmobiliario en Colombia ha presentado irregularidades en los años anteriores, muchos estudios señalan una desaceleración del sector que ha tenido poca variabilidad e incluso:

La desaceleración de las ventas de vivienda se profundizó desde 2016. Los constructores redujeron la oferta desde 2017, pero en una intensidad menor y con rezago respecto a las ventas. Así, los inventarios, las vacancias en la vivienda usada y los plazos de pre-venta aumentaron, manteniéndose un crecimiento real de los precios de la vivienda. El sector no residencial también evidenció una fuerte caída de la demanda en mayor proporción a la que registró la vivienda. (BBVA Research, 2018,p. 3)

Posteriormente, se logró evidenciar para el año 2018 un incremento en la demanda de vivienda, atribuido a una mayor confianza de los hogares y a una baja en las tasas de interés. Pese a esto, el déficit de vivienda sigue siendo significativo BBVA Research (2018)

El crecimiento constante de la formación de hogares con poca o nula capacidad para adquirir una vivienda nueva o usada y la incapacidad de las políticas públicas para proveer al total de la población de los subsidios necesarios; ambas contribuyen al crecimiento del déficit de vivienda. Sin embargo, aunque está por fuera del alcance de este proyecto analizar los impactos que pueda generar la inversión de fondos inmobiliarios en el mismo sector, es necesario analizar la situación actual y profundizar en la optimización de un portafolio como una idea de inversión

atractiva para el inversor que de una u otra forma coopere con el fortalecimiento de la demanda de bienes inmobiliarios.

Adicionalmente, el desconocimiento y la asimetría de información del mercado colombiano ha limitado el crecimiento de estos fondos inmobiliarios. Según Castaño (2018), para el año 2018 los fondos inmobiliarios solo aportaron el 7% del PIB . Así pues, la promoción de ventajas que se ofrecen para el inversionista en la diversificación de cartera y altos rendimientos poco volátiles podrían ser útiles para el aumento de la demanda de los fondos inmobiliarios y, en consecuencia, del sector inmobiliario en general.

Marco teórico

El desarrollo del presente proyecto se encuentra enmarcado en la perspectiva jurídico-legislativa desde la cual se delimita la creación, operación, balanceo y liquidación de las carteras colectivas inmobiliarias.

Desde la legislación y el marco legal la inversión inmobiliaria se ha desarrollado a partir de la promulgación del artículo 12 del Decreto 2555 de 2010. A través del artículo 14 de este mismo Decreto se regula la constitución, administración, gestión y distribución de las carteras colectivas inmobiliarias por agentes tales como: firmas comisionistas de bolsa de valores, sociedades fiduciarias y sociedades administradoras de inversión.

Por otra parte, para Szumilo, Wiegelmann,, Łaszkiewicz, Pietrzak y Balcerzak (2018) los activos inmobiliarios tienden a comportarse de manera similar a los activos de renta fija, al igual que la correlación de índices inmobiliarios con índices accionarios puede ser mínima pero negativa -para el caso alemán- y en algunos casos se puede presentar rendimientos similares sobre índices accionarios, dada la fluctuación de la cotización; lo que en teoría, puede permitir diversificación y reducción del riesgo al conformar los portafolios inmobiliarios. Se propone, a

partir de la teoría financiera de portafolios, tomar elementos necesarios para la optimización de una cartera compuesta por fondos de inversión colectiva inmobiliarios en Colombia.

Antecedentes de la literatura

Los términos fondos de inversión colectiva, portafolio de inversión colectiva, carteras colectivas o *Real Estate Investment Trust* (REIT) suelen emplearse en la revisión de la literatura relacionada con el tema, los cuales difieren generalmente en características, componentes y regulaciones de acuerdo con la localización geográfica.

Su origen se remonta a los *business trust*, que aparecieron a mediados del siglo XIX en Estados Unidos y que se transformarían, a partir de los años sesenta, en los REIT, compañías que adquieren y operan activos inmobiliarios y ofrecen a sus clientes un portafolio de posibilidades de inversión diversificadas en estos activos (Bailey, 1966, como se citó en ANIF ,2010 y en. Santana, 2014)

Desde entonces, la idea de composición de portafolios de inversión colectiva como vehículo de financiamiento y desarrollo del sector de la construcción, se expandió a diferentes países del mundo, con una evolución lenta, en la mayoría de los sectores.

Para el caso colombiano, los fondos de inversión colectiva aparecieron a principios del siglo XX. Surgieron como vehículos de ahorro-inversión y dependiendo de la actividad económica desempeñada acogían una estructura organizacional sujeta a diferentes marcos e instituciones regulatorias. Fue por ello que el Ministerio de Hacienda y Crédito Público expidió la norma “[...] Por el cual se regularía la gestión y administración de las carteras colectivas”. (Decreto 2175 de 2007, párr. 2).

Este tuvo como objetivo fundamental constituir y unificar un marco normativo como soporte institucional para estas entidades. En el año 2010, fue incorporado en el Decreto 2555 y modificado parcialmente en el año 2013 por los Decretos 1242 y 1243.

Entre las principales modificaciones introducidas se encuentran la separación y especialización de las actividades de gestión, administración y distribución; además de una reglamentación específica para las actividades de custodia de valores, incluidas disposiciones especialmente diseñadas para los fondos de inversión colectiva (Cárdenas, 2014)

El Decreto 1242 de 2013 considera como fondos de inversión colectiva inmobiliaria aquellos fondos de inversión colectiva cerrados cuya política de inversión prevea una concentración mínima del 75% en la siguiente clase de activos: Bienes inmuebles, ubicados en Colombia o en el exterior, títulos emitidos en procesos de titularización hipotecaria o inmobiliaria, derechos fiduciarios de patrimonios autónomos conformados por bienes inmuebles, participaciones en carteras colectivas inmobiliarias del exterior que tengan características análogas a las previstas en el artículo, en los términos que prevea el reglamento.

Dentro de sus actividades de inversión están los proyectos cuyo objetivo consista en la construcción, renovación, remodelación, comercialización, o explotación a cualquier título, en Colombia, de bienes inmuebles destinados ya sea a vivienda, actividades comerciales, empresariales, turismo, almacenamiento, de la salud entre otras, y podrán ser administradas por sociedades comisionistas de bolsa de valores, sociedades fiduciarias y sociedades administradoras de inversión.

Abordando ahora la teoría de selección de portafolios, según Markowitz (1952), se constituye en dos etapas. La primera etapa corresponde al director de la cartera en relación a su conocimiento del mercado y sus expectativas de desempeño al plazo. En la segunda etapa y

como objetivo de la aplicación del método, la conformación de la cartera optima, considerando el supuesto en el que el inversionista espera un rendimiento superior y una varianza o riesgo mínimo e indeseable, como resultado de esto, la preferencia por una cartera diversificada ante una no diversificada.

Anteriormente se han realizado recopilaciones de estudios y extensiones en el campo, Zhang, Li, y Guo (2018) mostraron las variaciones y ampliaciones que se han trabajado en la teoría, tales como la optimización dinámica, la optimización robusta, los factores prácticos y la selección difusa. Estos temas han permitido una mejora sustancial en el rendimiento del modelo, y permite a investigadores, profesionales y practicantes a encontrar herramientas teóricas útiles, a pesar de la complejidad y la incertidumbre en los mercados financieros.

Dentro de la literatura se ha buscado examinar la relación del desempeño de los activos de bienes raíces con otro tipo de activos de inversión y las implicaciones para los mercados financieros, como sugieren Szumilo et al. (2018) en su aplicación al mercado alemán, que en las últimas décadas los activos de bienes raíces en comparación con índices DAX (Accionario) y REX (Bonos) se han comportado de manera similar al mercado de bonos, también evidencian una posible relación en los rendimientos con los ciclos económicos tras un análisis en diferentes periodos de tiempo, en época de recesión, luego de la crisis financiera del 2008, los inversionistas han optado por títulos de deuda pública y con bienes inmobiliarios se ha logrado en teoría la diversificación del riesgo.

Algo semejante sucede para el caso de EEUU, como evidencian Etebari (2016) los bienes raíces presentaron la mejor afinidad rendimiento-riesgo, medido por la relación de Sharpe, contra las acciones y los bonos, a su vez, en combinación con los activos ya mencionados, se pudieron construir carteras óptimas para varios niveles de retorno requerido indicando un alto nivel de

diversificación dentro del marco de optimización de Markowitz. Con respecto a la instrumentación de activos financieros como cobertura contra la inflación, los bienes raíces presentaron cierta cobertura parcial positiva, a diferencia de la débil cobertura positiva de la deuda del tesoro y la completamente negativa de la deuda privada, evidenciando así la relevancia de esta clase activo esencial para la expansión de la frontera eficiente de inversión.

Hay que mencionar además, que dentro los problemas de optimización de carteras inmobiliarias, se ha intentado identificar el bien inmobiliario adecuado, acorde a la necesidades o demandas territoriales, a causa de ello, Rui y Xiaoya (2008) proponen una alternativa con el objetivo de establecer un modelo de cartera de bienes raíces con el menor riesgo como beneficio, el cual contempla entonces cinco tipos de proyectos inmobiliarios principales, entre los cuales se encuentran: Apartamentos Senior, Residencias ordinarias, oficinas, locales comerciales y espacios industriales, mediante análisis de indicadores de desempeño de cada tipo de inmueble por región, logran satisfacer el requerimiento de riesgo real mínimo y a través de pruebas demuestran la eficacia y eficiencia del algoritmo propuesto en la obtención de soluciones óptimas.

El siguiente aspecto hace referencia a la composición y el manejo de la liquidez óptimo desde la perspectiva de la administración del fondo inmobiliario, con este propósito, Ametefe, Devaney y Stevenson (2018) realizaron una exploración de los activos diferentes al afectivo con el objetivo de maximizar el rendimiento y la liquidez de los mismos, adicional a las inversiones directas en bienes inmuebles, usaron otros activos tales como REIT listados, acciones y bonos a diferentes plazos y procedimientos de optimización de error de seguimiento mínimo como extensión del modelo de Markowitz, concluyen entonces que el activo independiente más efectivo es el efectivo, pero dentro de la estrategia óptima esta incluir REIT listados y una

pequeña cantidad de acciones aportando liquidez, a pesar de que se deba sacrificar rendimiento superior, en conclusión, ampliar el espectro de activos líquidos conlleva a las carteras a obtener un menor error de seguimiento contra índices inmobiliarios de referencia.

En Colombia, Santana (2014), conforma mediante una lista de fondos inmobiliarios listados en el mercado colombiano, un portafolio con las rentabilidades de estos y optimiza linealmente mediante el modelo de Markowitz, utilizando, además, activos libres de riesgo, donde logra conformar un portafolio de fondos optimo con un desempeño en términos de rentabilidad superior a los índices IGBC y TES24, de renta variable y renta fija, respectivamente.

Metodología y datos

Para esta sección es fundamental resaltar el hecho de que se réplica aquí un modelo matemático extraído de la “Selección de portafolios” de Harry Markowitz.

Supuestos del modelo de Markowitz (1952)

1. La rentabilidad de cualquier título o cartera, es una variable aleatoria de carácter subjetivo cuya distribución de probabilidad para el periodo de referencia es conocido por el inversor. El valor de la esperanza matemática de dicha variable aleatoria se acepta como medida de la rentabilidad de la inversión.
2. Se acepta como medida del riesgo la dispersión, medida por la varianza o desviación típica de la variable aleatoria que describe la rentabilidad, sea un valor individual o de cartera.
3. El inversionista tiene preferencia por aquellas carteras que tienen más rentabilidad y menor riesgo.

Etapas para uso de la metodología de Formación de Carteras:

“1º Etapa Determinación del conjunto de carteras eficientes: una cartera eficiente ofrece el riesgo mínimo para un valor de rentabilidad esperado. Gráficamente podemos evidenciar que para aumentar la rentabilidad de una inversión debemos necesariamente aumentar el riesgo.

La frontera eficiente se halla maximizando la siguiente ecuación:

$$\text{Maximizar} \rightarrow \bar{R}_p = \sum_{i=1}^n X_i \bar{R}_i$$

Esta ecuación está sujeta a las siguientes restricciones

Restricción paramétrica: La sumatoria total de los pesos de cada valor de la cartera multiplicados por la covarianza de la misma, debe ser igual a la Varianza estimada de la cartera. Para cada valor de V^* tendremos una composición de la cartera diferente.

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{i,j} = V^*$$

Restricción presupuestaria: La suma total de los pesos de cada valor de la cartera no puede sumar más de 1. Es decir, nuestro presupuesto económico será el límite para obtener nuestra inversión.

$$\sum_{i=1}^n X_i = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n = 1$$

Condición de no negatividad: Los pesos de la cartera no pueden ser negativos, por lo cual serán mayores o iguales que cero.

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \geq 0$$

2º Etapa Determinación de la actitud del inversor frente al riesgo: la actitud del inversionista frente al riesgo dependerá de su mapa de curvas de indiferencia las cuales representan sus preferencias. Así pues, cada inversor tendrá una aversión al riesgo diferente y para cada nivel de riesgo que está dispuesto a asumir, exigirá una rentabilidad.

3º Etapa Determinación de la cartera óptima: la cartera óptima de una inversión la determina el punto tangente entre una de las curvas de indiferencia del inversor y la frontera eficiente. Las curvas que están por debajo de ese punto darán menos satisfacción y las que están por encima de ese punto no son factibles.” López (s.f)

Con respecto a las variables de entrada para el caso de estudio, se seleccionaron dos muestras, la primera, de nueve fondos de inversión colectiva inmobiliarios, desde enero de 2017 hasta abril de 2019. La segunda, de 4 fondos, desde enero de 2016 hasta abril de 2019. Se extrajo el valor de la unidad para las operaciones del día t , dispuesto por la Superintendencia Financiera de Colombia, cuando expresa que “la información retransmitida por parte de las sociedades administradores de fondos de inversión colectiva, correspondiente al Formato-523 del Informe 77 RENTABILIDADES, en virtud de lo dispuesto en la Circular Externa 12 de 2016” (2016, párr. 1), con periodicidad mensual. Se calcula la rentabilidad mensual de los fondos a través de la fórmula de variación dada la periodicidad en la cual se estudia la rentabilidad y con un interés simple, es decir, se toma el valor de la unidad para las operaciones del día t y se le resta el valor de la unidad para las operaciones del día $t-1$ y el resultado se divide en el valor de la unidad para las operaciones del día $t-1$. Dichas rentabilidades se expresan en porcentaje. La media y la varianza de los rendimientos mensuales se aproximaron mediante modelos estadísticos discretos, usando las formulas PROMEDIO y DESVEST en la hoja de cálculo Excel

Así mismo, se obtuvieron los precios para los índices COLCAP y COLTES, dispuestos por la Bolsa de Valores de Colombia y el índice de precios de la vivienda nueva (IPVNBR) el cual, de acuerdo con el Banco de la República (2013):

[...] mide la evolución mensual de los precios de la vivienda nueva en las tres principales ciudades de Colombia: Bogotá, Medellín, Cali y los municipios

alrededores de Bogotá (Chía, Cota, Cajicá, Tabio, Tenjo, La Calera, Sopó, Guaymaral, Funza, Madrid, Mosquera, Facatativá, Soacha y Ciudad verde). (párr.

1)

De acuerdo con lo anterior, con el mismo periodo de tiempo, numero de meses observados y periodicidad que la variable inicialmente mencionada para cada muestra respectivamente.

Para la optimización de portafolios se tienen en cuenta las siguientes restricciones:

1. El valor de las ponderaciones debe ser positivo.
2. La suma de las ponderaciones debe ser igual a 1.

Para la construcción de la cartera eficiente de nueve fondos, se utilizan como referencia las medidas de rendimiento esperado y desviación estándar calculadas para el índice COLTES, presentando dos escenarios: En el primero, se minimiza las desviación o riesgo de la cartera sujeto al rendimiento esperado del índice. En el segundo, se maximiza el rendimiento esperado sujeto al riesgo del mismo índice. Por último, se calcula el Sharpe Ratio como sugiere Sharpe (1994) de la siguiente manera:

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

Donde R_p es el rendimiento esperado del portafolio, R_f es la tasa libre de riesgo aproximada por la tasa IBR, y σ_p la desviación del portafolio. Con lo anterior se mide el retorno esperado por unidad de riesgo que proporciona el coeficiente objetivo maximizado. Se calcula de igual manera para los índices de referencia y se establece un comparativo con el portafolio óptimo para ambas muestras.

Resultados

Para la primera muestra, los 9 Fondos de Inversión Inmobiliaria seleccionados arrojaron las siguientes rentabilidades mensuales (Ver Tabla 1). Ocho de los nueve fondos de inversión seleccionados reportaron rentabilidades promedio positivas y desviaciones estándar inferiores a 0.1%, a excepción de los fondos E y G con 6.11% y 5.58% respectivamente.

Tabla 1. Rentabilidad mensual 9 fondos inmobiliarios

RENTABILIDAD MENSUAL									
FECHA	A	B	C	D	E	F	G	I	J
02/02/2017	0,3640%	0,237%	0,132%	0,181%	-0,354%	0,973%	0,870%	-0,210%	1,202%
02/03/2017	0,698%	0,583%	0,986%	1,038%	-0,484%	0,819%	0,792%	-0,199%	1,077%
02/04/2017	0,991%	0,863%	0,531%	0,583%	-0,454%	1,268%	0,874%	-0,210%	1,198%
02/05/2017	1,811%	1,686%	-0,048%	-0,003%	-0,942%	0,964%	0,847%	-0,224%	1,169%
02/06/2017	0,992%	0,864%	2,999%	3,077%	-7,606%	0,894%	0,868%	-0,216%	0,743%
02/07/2017	0,694%	0,571%	0,375%	0,425%	1,569%	0,621%	-1,066%	-0,209%	0,542%
02/08/2017	0,506%	0,379%	0,710%	0,765%	3,732%	0,749%	0,843%	-0,215%	0,141%
02/09/2017	0,384%	0,257%	0,357%	0,409%	-0,612%	0,355%	0,844%	-0,209%	-0,301%
02/10/2017	0,586%	0,463%	0,447%	0,487%	4,190%	0,277%	2,596%	-0,465%	-0,225%
02/11/2017	0,403%	0,277%	0,482%	0,534%	8,300%	0,645%	0,960%	-0,227%	-0,229%
02/12/2017	0,850%	0,727%	0,192%	0,239%	11,600%	0,404%	0,757%	-0,294%	-0,290%
02/01/2018	0,609%	0,482%	0,386%	0,437%	5,661%	0,939%	1,859%	-0,193%	-0,248%
02/02/2018	0,581%	0,454%	1,247%	1,305%	2,611%	0,610%	0,937%	-0,227%	-0,228%
02/03/2018	0,738%	0,623%	0,380%	0,426%	0,600%	1,135%	0,821%	-0,207%	-0,211%
02/04/2018	0,869%	0,742%	0,184%	0,232%	1,047%	0,859%	0,939%	-0,227%	-0,229%
02/05/2018	0,697%	0,573%	0,293%	0,342%	-0,797%	0,744%	0,932%	-0,203%	-0,204%
02/06/2018	1,735%	1,606%	0,447%	0,498%	-0,929%	0,777%	0,969%	-0,251%	-0,274%
02/07/2018	0,703%	0,580%	2,342%	2,407%	8,696%	0,697%	1,037%	-0,223%	-0,236%
02/08/2018	0,505%	0,378%	0,541%	0,610%	7,521%	0,610%	0,819%	-0,230%	-0,243%
02/09/2018	0,313%	0,186%	0,358%	0,421%	10,676%	0,341%	0,969%	-0,230%	-0,243%
02/10/2018	0,477%	0,354%	0,139%	0,166%	21,672%	0,595%	0,901%	-0,223%	-0,236%
02/11/2018	0,479%	0,352%	0,113%	0,161%	9,879%	0,469%	0,848%	-0,230%	-0,243%
02/12/2018	0,647%	0,524%	0,887%	0,939%	13,305%	0,491%	0,763%	-0,224%	-0,237%
02/01/2019	0,486%	0,359%	0,415%	0,455%	9,691%	1,574%	-17,535%	-0,230%	-0,243%
02/02/2019	0,645%	0,517%	1,571%	1,630%	0,690%	0,464%	0,376%	-0,230%	-0,243%
02/03/2019	0,675%	0,560%	0,127%	0,170%	0,152%	0,790%	0,328%	-0,210%	-0,223%
02/04/2019	0,869%	0,741%	0,712%	0,765%	1,335%	0,957%	0,359%	-0,231%	-0,243%
RE PROMEDIO	0,72%	0,59%	0,64%	0,69%	4,10%	0,74%	0,17%	-0,23%	0,05%
DV PROMEDIO	0,35%	0,35%	0,69%	0,70%	6,11%	0,30%	3,58%	0,05%	0,53%
CV	0,50	0,60	1,08	1,01	1,49	0,40	21,48	-0,22	11,56

El coeficiente de variación (CV) se calculó dividiendo la desviación estándar entre el rendimiento esperado. Este parámetro de la dispersión relativa indica el riesgo por unidad porcentual de rendimiento. Los fondos G y J presentan el mayor CV o riesgo relativo, por otra

parte, los fondos F y A con el menor CV. Cuanto más elevado esté el CV mayor es el riesgo relativo de los activos.

Como se muestra en la *Tabla 2*, el coeficiente de correlación -0.566 entre los fondos G y F, indica una correlación negativa fuerte entre ambos fondos ya que se encuentra entre -0,5 y -1.0 tal como se presenta en la *Figura 1*. Este valor indica que los rendimientos de ambos fondos tienen comportamientos inversos entre sí lo cual posibilita diversificar el riesgo en el portafolio. Los fondos A y B - C y D presentan correlación positiva cercana a 1 o casi perfecta debido a que son fondos administrados por la misma entidad y están constituidos por la misma clase de activos, sin embargo, cuentan con un reglamento interno diferente. El coeficiente 1 indica que sus rendimientos tienen tendencias muy similares. Al tener una correlación de 1 o casi 1, justifica que entre los fondos A y B se tome solo uno de ellos, y entre C y D suceda lo mismo. Lo cual los resultados de la optimización contenidos en las figuras 2 y 3 lo confirman.

Tabla 2. Matriz de Correlaciones 9 Fondos Para Periodicidad Mensual

MATRIZ DE CORRELACIONES									
CORRELACIÓN	A	B	C	D	E	F	G	I	J
A	1.000	1.000	0.028	0.028	-0.416	0.273	0.119	-0.019	0.318
B	1.000	1.000	0.026	0.026	-0.417	0.274	0.120	-0.019	0.319
C	0.028	0.026	1.000	1.000	-0.254	-0.016	0.064	0.077	0.078
D	0.028	0.026	1.000	1.000	-0.256	-0.018	0.066	0.079	0.079
E	-0.416	-0.417	-0.254	-0.256	1.000	-0.294	-0.160	-0.139	-0.472
F	0.273	0.274	-0.016	-0.018	-0.294	1.000	-0.566	0.399	0.390
G	0.119	0.120	0.064	0.066	-0.160	-0.566	1.000	-0.093	0.077
I	-0.019	-0.019	0.077	0.079	-0.139	0.399	-0.093	1.000	0.224
J	0.318	0.319	0.078	0.079	-0.472	0.390	0.077	0.224	1.000

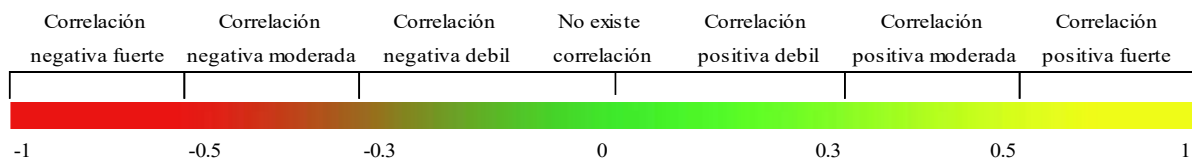


Figura 1. Escala Coeficiente de Correlación

Los valores que se encuentran en la diagonal de la *Tabla 3* indican la varianza del fondo mientras que los valores por debajo y por encima de la diagonal muestran las covarianzas. Como

se aprecia en la *tabla 3*, todos los fondos que tienen coeficientes negativos, en especial el fondo E, varían conjuntamente de manera opuesta en sus rentabilidades contribuyendo a la diversificación del riesgo.

Tabla 3. Matriz de Varianza y Covarianza 9 Fondos Para Periodicidad Mensual

MATRIZ DE VARIANZA Y COVARIANZA									
COV-VAR	A	B	C	D	E	F	G	I	J
A	1.23E-05	1.23E-05	6.63E-07	6.66E-07	-8.40E-05	2.82E-06	1.63E-05	-3.43E-08	5.92E-06
B	1.23E-05	1.23E-05	6.35E-07	6.36E-07	-8.42E-05	2.83E-06	1.65E-05	-3.39E-08	5.95E-06
C	6.63E-07	6.35E-07	4.67E-05	4.72E-05	-9.98E-05	-3.28E-07	1.70E-05	2.66E-07	2.84E-06
D	6.66E-07	6.36E-07	4.72E-05	4.76E-05	-1.02E-04	-3.66E-07	1.79E-05	2.77E-07	2.89E-06
E	-8.40E-05	-8.42E-05	-9.98E-05	-1.02E-04	3.31E-03	-4.99E-05	-3.61E-04	-4.04E-06	-1.44E-04
F	2.82E-06	2.83E-06	-3.28E-07	-3.66E-07	-4.99E-05	8.68E-06	-6.53E-05	5.93E-07	6.10E-06
G	1.63E-05	1.65E-05	1.70E-05	1.79E-05	-3.61E-04	-6.53E-05	1.53E-03	-1.83E-06	1.61E-05
I	-3.43E-08	-3.39E-08	2.66E-07	2.77E-07	-4.04E-06	5.93E-07	-1.83E-06	2.55E-07	6.00E-07
J	5.92E-06	5.95E-06	2.84E-06	2.89E-06	-1.44E-04	6.10E-06	1.61E-05	6.00E-07	2.82E-05

La frontera eficiente demuestra que, a mayor rentabilidad, mayor riesgo. Como se presenta en la *Figura 2*, todos los portafolios que se encuentren sobre la línea azul son eficientes. Los portafolios que se encuentran a la derecha y por debajo de la línea azul son ineficientes ya que no cumplen con los axiomas. Las preferencias del inversor para seleccionar el conjunto de portafolios eficientes dependerán del grado de aversión al riesgo. Cuanto menor sea el grado de aversión al riesgo, más posibilidad tendrá de escoger portafolios que se encuentren a la derecha de la línea. Si el inversionista minimiza el riesgo del portafolio obtiene una desviación de 0.048% y rentabilidades negativas de (-0,18%). Por el contrario, si es amante al riesgo y espera maximizar su rentabilidad, con un riesgo de 5,76% obtendrá rentabilidades esperadas de 4,10%.



Figura 2. Frontera eficiente para los FIC – Desviación estándar vs rentabilidad para 9 FICs y 28 meses.

Se realizó la optimización de portafolio en referencia a los índices de renta variable y renta fija COLTES y COLCAP. Para el índice COLTES se calculó rentabilidad mensual esperada de 0.61% y desviación estándar de 0.84% mensual, mientras que para el índice COLCAP, se calculó rentabilidad mensual esperada de 0.47% y desviación estándar de 3.85%. El índice IPVNBR presenta rendimiento esperado de 0.41% y volatilidad de 0.013%.

A continuación, se realiza el proceso de optimización de Markowitz (1952), utilizando como medida de referencia los parámetros de rendimiento y riesgo calculados para los índices COLTES y COLCAP, cumpliendo los siguientes 2 requisitos:

Minimizar el riesgo entre portafolios de igual rendimiento esperado del COLTES

El modelo considera óptimo el portafolio que minimiza el riesgo del inversionista dado una rentabilidad esperada. Para este caso se tomó de referencia la rentabilidad promedio del índice COLTES en el periodo de estudio la cual fue de 0.61%. Se logró encontrar una combinación de fondos de inversión inmobiliaria los cuales minimizaran el riesgo del portafolio a 0.14%, es decir, 70 puntos porcentuales por debajo del riesgo COLTES. Como se puede

evidenciar en la *Figura 3* la canasta de fondos que conformó este portafolio fue encabezada por el fondo F con una participación del 51% del portafolio, seguida por el fondo I con 19%, fondo A 17%, fondo D 8% y fondos E y G cada uno con 2%.



Figura 3. Participación FIC'S mínima desviación respecto al COLTES

Maximizar rentabilidad entre portafolios de igual riesgo del COLTES

Así mismo, se logró obtener ponderaciones para 5 fondos de manera que maximizaran la rentabilidad esperada del portafolio de inversión a 1,27% mensual, sujeto a un riesgo máximo admitido que para este caso de estudio fue el riesgo COLTES (0,84% mensual). El portafolio de inversión que maximiza la rentabilidad se constituyó principalmente con el fondo A con una participación del 39% del portafolio, seguido del fondo F 34%, fondo E 16% y fondo D 11% como se muestra en la *Figura 4*. Este portafolio genera rentabilidad 0,66% superior a COLTES.



Figura 4. Participación FIC'S máxima rentabilidad respecto al COLTES

Puede observarse que los fondos B y C fueron excluidos del portafolio óptimo como producto de su alta correlación positiva con los fondos A y D, respectivamente.

Minimizar el riesgo entre portafolios de igual rendimiento esperado del COLCAP

Se encontró un portafolio óptimo el cual logró minimizar el riesgo hasta 0.125% dado el rendimiento esperado del índice COLCAP (0.474%). La *figura 5* permite percibir la conformación del portafolio y el grado de participación de cada fondo en el mismo. El fondo F tiene el porcentaje de ponderación mayor del portafolio (42%), seguido del fondo I (32%), fondo A (15%), fondo D (7%) y fondos E y G 2% respectivamente.



Figura 5. Participación FIC'S mínima desviación respecto al COLCAP

Maximizar rentabilidad entre portafolios de igual riesgo del COLCAP

Se encontró un portafolio que maximizó las rentabilidades del portafolio FIC'S con una desviación determinada de 3.849% perteneciente al índice COLCAP. La rentabilidad máxima fue de 3.006% y el portafolio compuesto principalmente por el fondo E con una participación del 68% seguido del fondo A 31% y fondo D 1%.

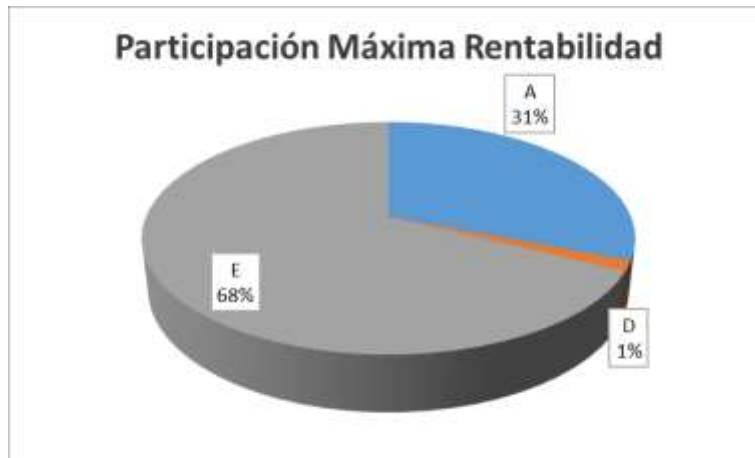


Figura 6. Participación FIC'S máxima rentabilidad respecto al COLCAP

Para la segunda muestra, se toman 4 fondos que proveen información histórica para un lapso de tiempo mayor en comparación a la primera muestra. La Tabla 4 presenta las rentabilidades de 4 fondos de inversión inmobiliario para un lapso de 40 meses. Todos los fondos de inversión muestran rentabilidades esperadas positivas. Tres fondos (C, D y F) obtuvieron desviaciones menores en comparación al fondo G, el cual presenta un CV de 9.13, indicando riesgo relativo superior.

Tabla 4. Rentabilidad mensual 4 fondos inmobiliarios y 40 meses

RENTABILIDAD MENSUAL				
FECHA	C	D	F	G
02/02/2016	-0,19%	-0,14%	0,92%	0,72%
02/03/2016	3,64%	3,71%	1,59%	0,66%
02/04/2016	1,84%	1,90%	1,41%	0,74%
02/05/2016	0,17%	0,22%	1,20%	0,72%
02/06/2016	0,40%	0,45%	0,99%	0,75%
02/07/2016	0,34%	0,39%	0,93%	0,09%
02/08/2016	0,66%	0,71%	0,66%	0,66%
02/09/2016	0,35%	0,40%	0,72%	0,81%
02/10/2016	1,84%	1,91%	0,11%	0,78%
02/11/2016	1,94%	2,01%	0,37%	0,82%
02/12/2016	-0,01%	0,04%	0,20%	0,81%
02/01/2017	0,29%	0,34%	0,53%	0,64%
02/02/2017	0,13%	0,18%	0,97%	0,87%
02/03/2017	0,99%	1,04%	0,82%	0,79%
02/04/2017	0,53%	0,58%	1,27%	0,87%
02/05/2017	-0,05%	0,00%	0,96%	0,85%
02/06/2017	3,00%	3,08%	0,89%	0,87%
02/07/2017	0,37%	0,42%	0,62%	-1,07%
02/08/2017	0,71%	0,77%	0,75%	0,84%
02/09/2017	0,36%	0,41%	0,35%	0,84%
02/10/2017	0,45%	0,49%	0,28%	2,60%
02/11/2017	0,48%	0,53%	0,65%	0,96%
02/12/2017	0,19%	0,24%	0,40%	0,76%
02/01/2018	0,39%	0,44%	0,94%	1,86%
02/02/2018	1,25%	1,30%	0,61%	0,94%
02/03/2018	0,38%	0,43%	1,13%	0,82%
02/04/2018	0,18%	0,23%	0,86%	0,94%
02/05/2018	0,29%	0,34%	0,74%	0,93%
02/06/2018	0,45%	0,50%	0,78%	0,97%
02/07/2018	2,34%	2,41%	0,70%	1,04%
02/08/2018	0,54%	0,61%	0,61%	0,82%
02/09/2018	0,36%	0,42%	0,34%	0,97%
02/10/2018	0,14%	0,17%	0,60%	0,90%
02/11/2018	0,11%	0,16%	0,47%	0,85%
02/12/2018	0,89%	0,94%	0,49%	0,76%
02/01/2019	0,42%	0,45%	1,57%	-17,54%
02/02/2019	1,57%	1,63%	0,46%	0,38%
02/03/2019	0,13%	0,17%	0,79%	0,33%
02/04/2019	0,71%	0,77%	0,96%	0,36%
RE PROMEDIO	0,73%	0,79%	0,76%	0,33%
DV PROMEDIO	0,85%	0,86%	0,35%	2,98%
CV	1,16	1,09	0,46	9,13

Como se presenta en la *Tabla 5*, los fondos F y G presentan un coeficiente de correlación de -0.395 lo cual indica una correlación negativa débil entre ambos fondos lo cual permite una diversificación del riesgo, pero aun nivel de significancia menor. Los fondos C y D presentan correlación casi perfecta y cercana a 1, justificando que para diversificar solo se tome uno de los dos activos, lo cual confirma los resultados contenidos en la figura 8.

Tabla 5. Matriz de Correlaciones 4 Fondos Para Periodicidad Mensual

MATRIZ DE CORRELACIONES				
CORRELACIÓN	C	D	F	G
C	1,000	1,000	0,169	0,059
D	1,000	1,000	0,059	0,061
F	0,169	0,168	1,000	-0,395
G	0,059	0,061	-0,395	1,000

Como se aprecia en la Tabla 6 la mayoría de fondos presentan coeficientes positivos indicando la relación directa de las rentabilidades. Los fondos F y G presentan covarianza negativa lo cual indica el comportamiento inverso entre las variaciones de sus rentabilidades.

Tabla 6. Matriz de Varianza y Covarianza 4 Fondos

MATRIZ DE VARIANZA Y COVARIANZA				
COV-VAR	C	D	F	G
C	7.0153E-05	7.0829E-05	4.8888E-06	1.4523E-05
D	7.0829E-05	7.1515E-05	4.9084E-06	1.5118E-05
F	4.8888E-06	4.9084E-06	1.1979E-05	-4.0146E-05
G	1.4523E-05	1.5118E-05	-4.0146E-05	0.00086323

La frontera eficiente de los 4 fondos presenta todos los portafolios eficientes que se encuentran entre el punto donde se minimiza el riesgo y el punto donde se maximiza la rentabilidad. Si el inversionista desea tener el mínimo riesgo, escoge el punto en el cual la desviación es de 0.3% y obtiene rendimientos de 0.74%. Por el contrario, si el inversionista desea maximizar la rentabilidad asumiendo riesgos mayores, obtiene rendimientos de 0.79% con un riesgo de 0.85% tal como se presenta en la *Figura 7*.

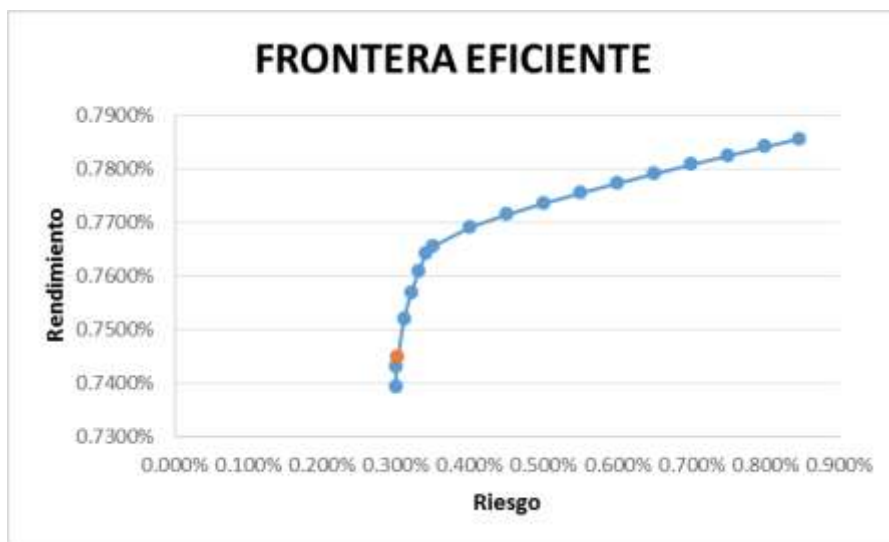


Figura 7. Frontera eficiente para los FIC – Desviación estándar vs rentabilidad para 4 FICs y 40 meses.

La optimización del portafolio se hace a través de la maximización de la razón de Sharpe y se compara los resultados obtenidos para las razones de Sharpe en ambas muestras para el portafolio de inversión inmobiliaria, COLTES y COLCAP (Tabla 8).

Maximización Ratio de Sharpe

Se calculó el Ratio de Sharpe para ambas muestras utilizando la tasa libre de riesgo IBR, en la muestra de 9 fondos, se tomó la del 02 de abril de 2019 la cual fue de 4.25% efectiva anual equivalente 0.348% efectiva mensual. En la segunda muestra de 4 fondos, se tomó la del 02 de enero de 2016.

Como se presenta en la Figura 8, la ponderación que maximiza la razón de Sharpe para la muestra de 9 fondos es de 71% para el fondo F, 13% para el fondo B, 10% para el fondo C, 3% para los fondos G y E y 0% para los restantes. El rendimiento mensual esperado de dicho portafolio es de 0.79%, la desviación mensual esperada el del 0.18% y un Ratio de Sharpe de 2.47.

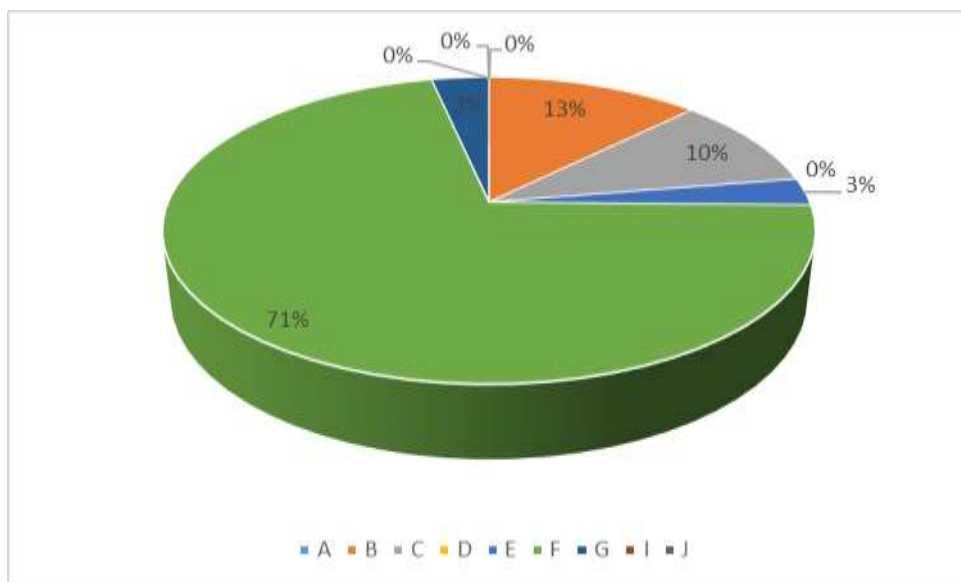


Figura 8. Participación FIC'S máximo R-Sharpe 9 Fondos y 28 meses

En la Figura 9, se presenta la ponderación que maximiza la razón de Sharpe para la muestra de 4 fondos, con 89% para el fondo F, 7% para el fondo D, 4% para el fondo G y 0% para el Fondo C. El rendimiento esperado de dicho portafolio es de 0.75% mensual, la desviación esperada el del 0.30% mensual y un Ratio de Sharpe de 1.32.

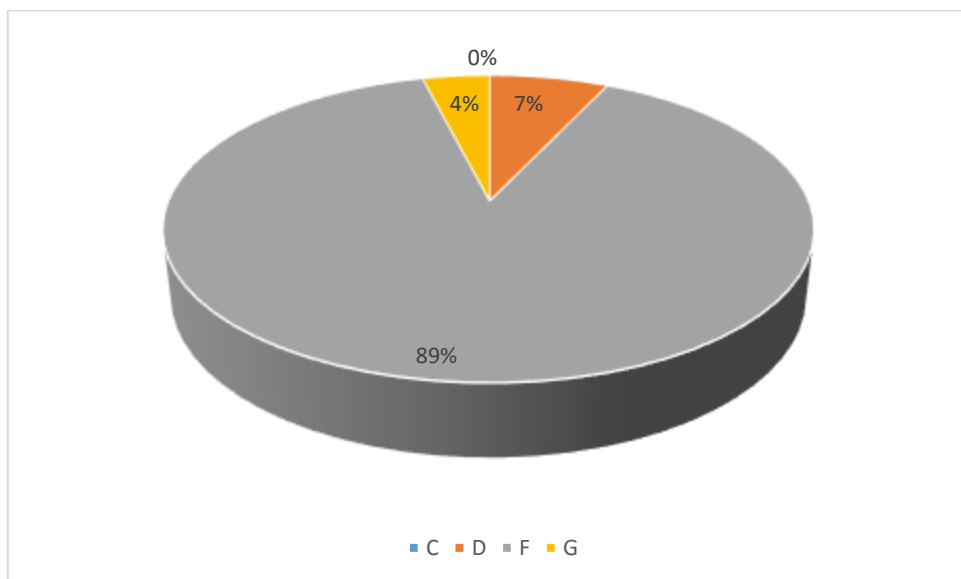


Figura 9. Participación FIC'S máximo R-Sharpe 4 Fondos y 40 meses

Si bien los índices no se componen ni se rebalancean como los portafolios inmobiliarios, la *Tabla 7* da evidencia de un mayor exceso de recompensa para el portafolio óptimo en relación a los índices COLCAP y COLTES para ambas muestras. En contraste con los resultados hallados por Etebari (2016), en el cual calculan, para Estados Unidos en el periodo 1978-2012, el R-Sharpe para los índices T-Bills, T-Bonds, S&P500 y NPI (indicador inmobiliario), los cuales fueron 0.0, 0.38, 0.44 y 0.52 respectivamente. El indicador inmobiliario presenta mayor R-Sharpe que el índice accionario y índice de deuda gubernamental, tal como aquí se presenta, no obstante, en este caso el índice de deuda gubernamental presenta mejor R-Sharpe que el índice accionario.

Tabla 7. Comparativo R-Sharpe

	Muestra 4 Fondos	Muestra 9 Fondos
R-Sharpe Portafolio	1.32	2.47
R-Sharpe COLTES	0.45	0.32
R-Sharpe COLCAP	0.12	0.07

Como muestra Santana (2014), conformando un portafolio con rendimientos promedio superiores al IGBC y TES24 para el año 2012. Estos portafolios obtenidos presentaron mejor desempeño en términos de rentabilidad que los referentes de renta variable y renta fija con los que compara.

Conclusiones

A través del modelo de optimización de Markowitz (1952) se logra obtener un portafolios óptimo para cada muestra analizada, mostrando que estos instrumentos son útiles para la gestión adecuada del riesgo y resultando de utilidad práctica en la toma de decisiones de inversión. Los resultados de las muestras de 4 y 9 fondos evidencian que para el periodo de tiempo analizado, los activos financieros de tipo inmobiliario presentan mejor desempeño, medido por el R-Sharpe, que los activos de renta variable y renta fija representados por los índices COLCAP y COLTES,

respectivamente, indicando mayor recompensa por unidad de riesgo asumida. En términos de volatilidad, el índice de precios a la vivienda nueva IPVNBR presenta la menor, con 0.013%, ubicándose por debajo de la volatilidad de los índices y de los fondos inmobiliarios evaluados, sin embargo, con rendimientos esperados inferiores.

Los Fic's inmobiliarios permiten la adquisición conjunta de gran variedad de clases de activos inmobiliarios y el desarrollo de distintas actividades de lucro comprendidas por la industria inmobiliaria en general, ampliando el espectro de inversión y superando en rendimiento a la tradicional adquisición directa de vivienda nueva. Estos, respaldados por un marco regulatorio y financiero que proporciona garantías jurídicas al inversionista. Los Fic's inmobiliarios se constituyen también como un instrumento financiero que permite combinar las ventajas del mercado financiero con los beneficios del sector inmobiliario, con costos iniciales de inversión desde 2 Salarios Mínimos Legales Mensuales Vigentes (SMLMV) para inversionistas comunes, hasta 75,000 SMLMV en adelante para inversionistas institucionales.

Referencias

- Ametefe, F. K., Devaney, S., & Stevenson, S. A. (2018). Optimal composition of hybrid/blended real estate portfolios. *Journal of Property Investment and Finance*, 37(1), 20–41.
- Bailey, E. (1996). Real Estate Investment Trusts: an appraisal. *Financial Analysts Journal*, 22 (3), 107-114.
- Banco de la República de Colombia. (2013). Índice de precios de la vivienda nueva (IPVNBR). Recuperado de <https://bit.ly/2H87Vqv>
- BBVA Research. (2018). *Situación Inmobiliaria 2018*.
- Cárdenas, F. (2014). Las actividades de administración, gestión, distribución y custodia en los fondos de inversión colectiva a la luz de los decretos 1242 y 1243 de 2013. *Revista de*

Derecho Privado, (51), 4–31.

Castaño, J. (2018). El valor de la actividad fiduciaria en la economía colombiana. In 27°

Congreso Latinoamericano de Fideicomiso.

a luz de los decretos 1242 y 1243 de 2013. *Revista de Derecho Privado*, 51.

Decreto 2175 de 2007 Por el cual se regula la administración y gestión de las carteras colectivas.

12 de junio de 2007.

Decreto 2555 de 2010 Por el cual se recogen y reexpiden las normas en materia del sector

financiero, asegurador y del mercado de valores y se dictan otras disposiciones. 15 de julio de 2010.

Decreto 1242 de 2013 Por el cual se sustituye la Parte 3 del Decreto 2555 de 2010 en lo

relacionado con la administración y gestión de los fondos de inversión colectiva. 14 de junio de 2013.

Decreto 1243 de 2013. Por el cual se modifica el Decreto 2555 de 2010 en lo relacionado con la

actividad de custodia de valores y se dictan otras disposiciones. 14 de junio de 2013.

Decreto 2090 de 2017 Por el cual se modifica el Decreto 2555 de 2010 en lo relacionado con los

fondos de inversión colectiva inmobiliarios y la titularización inmobiliaria, y se dictan otras disposiciones. 12 de diciembre de 2017.

Etebari, A. (2016). Real estate as a portfolio risk diversifier. *Investment Management and*

Financial Innovations, 13(2), 45–52. [https://doi.org/10.21511/imfi.13\(2\).2016.05](https://doi.org/10.21511/imfi.13(2).2016.05)

Fernández Gimeno, J., Llovera Sáez, F. J., & Roig Hernando, J. (2012). Los REITs españoles

como vehículo de inversión y financiación de la actividad inmobiliaria: Las SOCIMI.

(Spanish). *Intangible Capital*, 8(2), 308–363.

López, J.F. (s.f.) Modelo de Markowitz. [en línea]. Recuperado de: <https://bit.ly/2DZwHZ9>

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91.

<https://doi.org/10.1144/GSL.JGS.1861.017.01-02.11>

Mendizabal, A., Miera, L., & Zubia, M. (2002). El modelo de Markowitz en la gestión de carteras, 2, 33–46.

Rui, L., & Xiaoya, W. (2008). Using elitist particle swarm optimization to facilitate real estate portfolio based on information entropy. In *Proceedings of International Conference on Risk Management and Engineering Management* (pp. 633–638).

<https://doi.org/10.1109/ICRMEM.2008.126>

Santana, L. (2014). Estimación del Beta para el Sector Inmobiliario a partir del Desempeño de Fondos de Inversión Inmobiliaria en Colombia. *Finanzas y Política Económica*, 7, 83–95.

Sharpe, W. (1994). The Sharpe Ratio. *Journal of Portfolio Management*, 21(1), 1-19.

SIFIC Colombia ¿En que consiste la categorización de Fondos de Inversión Colectiva?.

Recuperado de <https://bit.ly/2VzK656>

Superintendencia financiera de Colombia. (2016). Reporte de las rentabilidades de Fondos de Inversión Colectiva. Recuperado de <https://bit.ly/305I2QW>

Szumilo, N., Wiegelmann, T., Łaskiewicz, E., Pietrzak, M. B., & Balcerzak, A. P. (2018). The real alternative? A comparison of German real estate returns with bonds and stocks.

Journal of Property Investment & Finance, 36(1), 19–31.

Zhang, Y., Li, X., & Guo, S. (2018). Portfolio selection problems with Markowitz's mean–variance framework: a review of literature. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 17(2), 125–158. <https://doi.org/10.1007/s10700-017-9266-z>